12/12/2017

<u>Παράδειγμα:</u> $\bar{\gamma}(t) = \bar{x} + t(\bar{y}-\bar{x})$, $t \in [0,1]$

τότε και η $\bar{\gamma}(\tau) = \bar{x} + \tau a(\bar{y}-\bar{x})$, $\tau \in [0, \frac{1}{a}]$ $(a>0)$

μας δίνει το ίδιο C δηλ ευθ. τμήμα από το $\bar{x}$ στο $\bar{y}$

Βλέπουμε $\bar{\gamma}'(t) = \bar{y}-\bar{x} \Rightarrow$

$$\|\bar{\gamma}'(t)\| = \|\bar{y}-\bar{x}\|$$

$$\bar{\gamma}'(t) = a(\bar{y}-\bar{x}) \Rightarrow \|\bar{\gamma}'(t)\| = a\|\bar{y}-\bar{x}\|$$

<u>Προσοχή</u>: Εδώ υπολογίσαμε το μήκος της <u>παραμετρικής καμπύλης</u> $\bar{\gamma}$ <u>όχι</u> το μήκος της

$$C = \bar{\gamma}([a,\beta])$$

Θα δούμε σε λίγο πως υπολογίζεται το μήκος του C το οποίο ονομάζεται <u>μήκος τόξου</u> (υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ενώ $\bar{\gamma}$ συνάρτηση από το $I \in \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^n$).

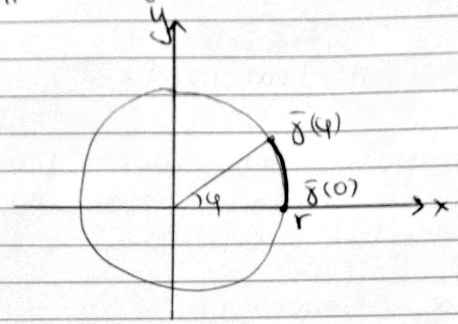
<u>Π.χ.</u> Το μήκος του τόξου του κύκλου

$\bar{\gamma}: [0,\varphi] \xrightarrow{\text{μήκος}} \mathbb{R}^2$ $\bar{\gamma}(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\varphi]$, $r>0$

$(\Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = r(-\sin t, \cos t) \Rightarrow \|\bar{\gamma}'(t)\| = r)$

Είναι $L(\bar{\gamma}) = \int_0^{\varphi} \underbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}_{=r} dt = r\varphi$

$\xRightarrow{\varphi=2\pi}$ $L(\bar{\gamma}) = 2\pi r$



[Συμπλήρωση τέλους απόδειξης του Θεωρήματος]

$$\Big|\underbrace{\int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt}_{=S} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu} \|\bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1})\|}_{=\Sigma}\Big| \leq (*)$$

$$\left|\int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt - \underbrace{\sum_{k=1}^{\nu} \|\bar{\gamma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1})}_{=\Sigma'}\right| +$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} \|\bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1}) - \bar{\gamma}'(t_k)(t_k - t_{k-1})\| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\varepsilon(t_k - t_{k-1})}{2(\beta - \alpha)} = \varepsilon$$

$$(*) \leq |S - \Sigma'| + \sum_{\nu=1}^{n} \Big| \|\bar{\gamma}'(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) - \|\bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1})\| \Big|$$

$$\leq \|\bar{\gamma}(t_k) - \bar{\gamma}(t_{k-1}) - \bar{\gamma}'(t_k)(t_k - t_{k-1})\|$$

$$\big|\|\alpha\| - \|\beta\|\big| \leq \|\beta - \alpha\|$$

Όσο για το λήμμα 1

Άσκηση αν γνωρίζουμε ότι $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leq$

$\int_a^b f^2(x)\,dx$, τότε (Άσκηση!!!)

$$\left\| \int_a^b \bar{\gamma}(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|\bar{\gamma}(t)\|\,dt$$

Όπως είδαμε (π.χ. ευθύγραμμο τμήμα, κύκλος) μια καμπύλη C ως υποσύνολο μπορεί να έχει διάφορες παραμετρικοποιήσεις $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{\gamma}(I) = C$

Ποια η σχέση μεταξύ αυτών:

→ Ορισμός Έστω $\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και $\varphi: [A,B] \to [a,b]$ μια 1-1 και επί συνεχής συνάρτηση. Τότε λέμε ότι η $\bar{J} = \bar{\gamma} \circ \varphi$

$[A,B] \to \mathbb{R}^n$ προκύπτει από την αναπαραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}$ υπό τον παραμετρικό μετασχηματισμό φ

Αν φ αύξουσα λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό αν φ φθίνουσα ότι τον αντιστρέφει.

π.χ. Είχαμε δει $\bar{\gamma}(t) = \bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, $t \in [0,1]$

$$\bar{J}(\tau) = \bar{x} + \tau a(\bar{y} - \bar{x}) \,,\ \tau \in [0, \tfrac{1}{a}] \quad (a > 0)$$

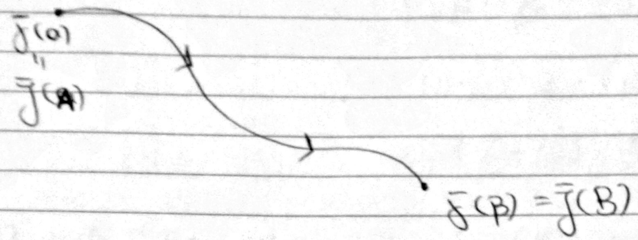
μήπως με $\varphi(\tau) = \underbrace{a\tau}_{=t}$, $\tau \in [0, \frac{1}{a}]$ έχουμε $\bar{J}(\tau) = \bar{\gamma}(\underbrace{\varphi(\tau)}_{=t})$;

Ναι και έχουμε $\varphi'(\tau) = a > 0$ και είναι 1-1 και επί $\varphi\, [\underset{A}{0}, \underset{B}{\tfrac{1}{a}}] \longrightarrow [\underset{a}{0}, \underset{b}{1}]$ και διατηρεί τον

προσανατολισμό (δηλ. διατρέχει την εικόνα $C = \bar{\gamma}([a,b]) = \bar{J}([A,B])$)

με τον ίδιο τρόπο « αν και με τους δυο τρόπους (δρόμους) πρώτα περνάω από κάποιο σημείο (δεδομένο)

Έχω τον ίδιο προσανατολισμό.



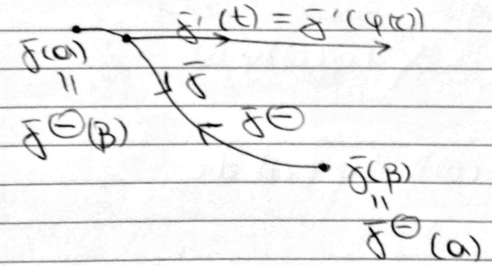
<u>Ορισμός</u>: Έστω μια καμπύλη $\bar{\gamma}:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$

Τότε η $\bar{\gamma}^-(t) = \bar{\gamma}(\alpha+\beta-\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$

ονομάζεται <u>αντίστροφη καμπύλη</u> της $\bar{\gamma}$

$(\bar{\gamma}^-(\tau) = (\bar{\gamma}\circ\varphi)(\tau)$, $\varphi(\tau) = \alpha+\beta-\tau$, $\tau \in [\alpha,\beta]$

$\Rightarrow \varphi'(\tau) = -1 \Rightarrow$ ο φ αντιστρέφει τον προσανατολισμό



Επίσης, $\bar{\gamma}(\tau) = (\bar{\gamma}\circ\varphi)(\tau) \Rightarrow \bar{\gamma}'(\tau) = \bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)$

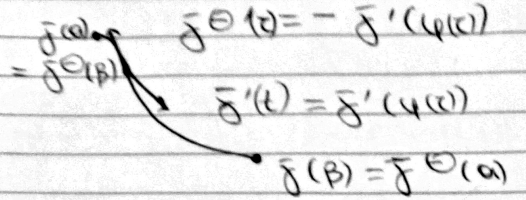
$(\bar{\gamma}\circ\varphi)'(\tau) = D(\bar{\gamma}\circ\varphi)(\tau) = D\bar{\gamma}(\varphi(\tau))\cdot D\varphi(\tau) =$

$\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)$

Έτσι, ειδικότερα, $\bar{\gamma}^{\ominus\prime}(\tau) = (\bar{\gamma}\circ\varphi)'(\tau)$ με

$\varphi(\tau) = \alpha+\beta-\tau$, $e \in [\alpha,\beta] \Rightarrow \varphi'(\tau) = -1$

$\bar{\gamma}^{\ominus}(\tau) = \bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\underbrace{\varphi'(\tau)}_{=-1}$



<u>Πρόταση</u>: (Βασικό !) Έστω $\gamma: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μια C^1-καμπύλη και $\varphi: [A,B] \to [\alpha,\beta]$ ένας C^1-π.μ.

[π.μ. = παραμετρικός μετασχηματισμός
C^1 = συνεχώς διαφορίσιμη (-ο, -ος)]

Τότε, για την αναπαραμετροποιημένη καμπύλη $\bar\gamma = \gamma\circ\varphi \quad [A,B] \to \mathbb{R}^n$ ισχύει $\boxed{L(\bar\gamma) = L(\gamma)}$

<u>Απόδειξη</u>

$$L(\bar\gamma) \underset{\text{ορ.}}{=} \int_A^B \|\underbrace{\bar\gamma'(\tau)}_{\underset{\text{καν. αλυσ.}}{=} \gamma'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)}\| d\tau$$

$$= \int_A^B \|\gamma'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)| \, d\tau$$

Έστω $\varphi'(\tau) > 0$

$$= \int_A^B \|\gamma'(\varphi(\tau))\| \, \varphi'(\tau) \, d\tau$$

$$= f(\varphi(\tau)) = \int_{\alpha=\varphi(A)}^{\beta=\varphi(B)} \|\gamma'(t)\| \, dt = L(\gamma)$$

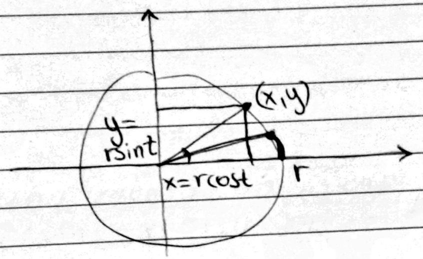
$$\Big[\, t \overset{}{\underset{f}{\mapsto}} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{= f(t)} \,\Big]$$

$\Longrightarrow$ <u>Ορισμός</u>: Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ και $\gamma: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ απλή ή απλή κλειστή C^1-καμπύλη με την ιδιότητα

$\bar{\gamma}([a,b]) = C$. Τότε ονομάζουμε μήκος τόξου της C

$$L(C) = L(\bar{\gamma}) = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt$$

[ο ορισμός αυτός έχει νόημα αφού, όποια $\bar{\gamma}$ και αν πάρω, ανεξάρτητα του προσανατολισμού αρκεί να είναι απλή, ή απλή κλειστή, θα έχει το ίδιο μήκος]



$\bar{\gamma}(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Longrightarrow \bar{\gamma}([0, 2\pi]) = C$

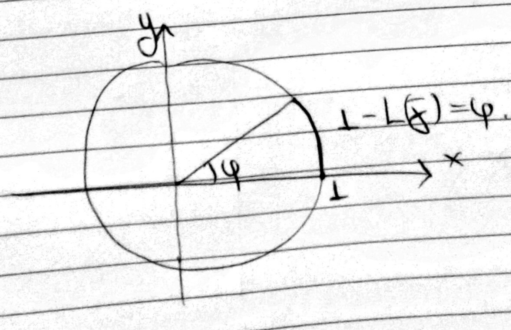
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$

$\Longrightarrow \bar{\gamma}$ απλή κλειστή και $L(C) = L(\bar{\gamma}) =$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}_{=r}\,dt = 2\pi r$$

Υπενθύμιση: Στο «τμήμα» (τόξο) του μοναδιαίου κύκλου $\bar{\gamma} : [0, \varphi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ έχουμε μήκος τόξου $L(\bar{\gamma}([0,\varphi])) = L(\bar{\gamma}) =$

$$\int_0^{\varphi} \underbrace{\|\bar{\gamma}'(t)\|}_{=1}\,dt = \varphi$$



Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ μια κανονική καμπύλη (δηλ. C^1 με $\|\bar{\gamma}'(t)\|>0\ \forall t\in[\alpha,\beta]$)

Τότε η $s(t)=\int_0^t \|\bar{\gamma}'(\tau)\|d\tau,\ t\in[\alpha,\beta]$

δίνει σε κάθε «χρονική στιγμή» t το μήκος τόξου της καμπύλης $\bar{\gamma}$ και ονομάζεται συνάρτηση μήκους τόξου.

Πρόταση

Η αντίστροφη s^{-1} της συνάρτησης μήκος τόξου είναι ένας C^1 - πορ. μετασχ. που διατηρεί τον προσανατολισμό. (Ε.)

«Απόδειξη» $s:[\alpha,\beta]\to[0,L(\bar{\gamma})]$

$s'(t)=\|\bar{\gamma}'(t)\|>0 \Longrightarrow$

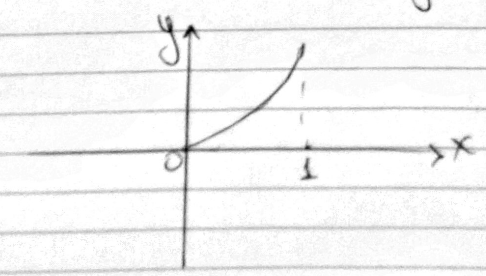
$\bar{\gamma}$ κανονική

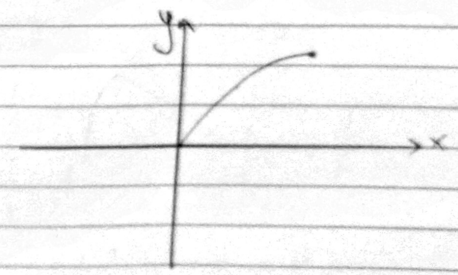
$s:[\alpha,\beta]\to[0,L(\bar{\gamma})]$ και είναι

$C^1 \Longrightarrow s^{-1}:[0,L(\bar{\gamma})]\to[\alpha,\beta]$ 1-1 και επί C^1

με $(s^{-1})'(\tau)=\dfrac{1}{s'(s^{-1}(\tau))}$ (και αφού s αύξουσα

και η s^{-1} αύξουσα

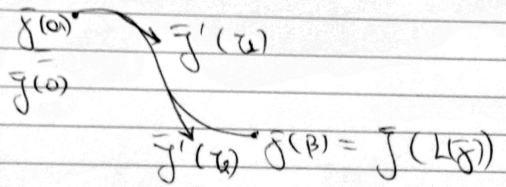




Ορισμός: Έστω μία κανονική καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ με συνάρτηση μήκος τόξου $s : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Τότε η $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$

ονομάζεται αναπαραμετρικοποίηση της γ ως προς μήκος τόξου

Πρόταση: Η $\tilde{\gamma}'$ έχει σε κάθε σημείο της μοναδιαίας ταχύτητας $\|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = 1 \quad \forall \tau \in [0, L(\gamma)]$



και αντίστροφα, μία κανονική καμπύλη η οποία έχει μοναδιαία ταχύτητα είναι παραμετρικοποιημένη ως προς μήκος τόξου

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=1} dt = t \underbrace{(-\alpha)}_{=0}$$

$$\tilde{\gamma}'(\tau) = \dots = \frac{\gamma'(s^{-1}(\tau))}{\|\gamma'(s^{-1}(\tau))\|}$$

Άσκηση

Ποια η αντίστροφη καμπύλη της $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$